

## 基于隐式分段自回归模型的图像插值算法\*

任杰, 刘家璞, 白蔚, 郭宗明<sup>+</sup>

(北京大学 计算机科学技术研究所, 北京 100871)

### Image Interpolation Algorithm Based on Implicit Piecewise Autoregressive Model

REN Jie, LIU Jia-Ying, BAI Wei, GUO Zong-Ming<sup>+</sup>

(Institute of Computer Science and Technology, Peking University, Beijing 100871, China)

<sup>+</sup> Corresponding author: E-mail: guozongming@pku.edu.cn, <http://www.icst.pku.edu.cn>

**Ren J, Liu JY, Bai W, Guo ZM. Image interpolation algorithm based on implicit piecewise autoregressive model. *Journal of Software*, 2012, 23(5): 1248–1259. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4049.htm>**

**Abstract:** The piecewise statistical stationary property of natural image signals provides an effective way to model the image signals. However, the statistical stationary region always has an irregular profile. Large mismatch errors rise when a regular shape window is adopted to estimate the statistics in these regions. This paper proposes an implicit piecewise autoregressive model based on a probabilistic description of the statistical stationary region. According to this model, an improved image interpolation algorithm is presented. The experimental results show that the proposed interpolation method can greatly alleviate the blurring, ringing, and noisy artifacts around edges in interpolated image.

**Key words:** image interpolation; autoregressive model; piecewise statistical stationary; weighted least squares

**摘要:** 利用自然图像信号的分段统计稳态性可以有效地对图像信号进行建模. 其分段统计稳态区域往往具有非规则的形态. 采用规则窗口对图像统计稳态区域内的统计量进行估计存在较大的误差. 提出一种基于概率描述的隐式分段自回归模型来刻画分段统计稳态区域形态, 并基于该模型提出了一种改进的图像插值算法. 实验结果表明, 该方法可以较好地改善插值图像中在边缘处的模糊、振铃和噪声等瑕疵现象.

**关键词:** 图像插值; 自回归模型; 分段统计稳态; 加权最小二乘法

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

图像插值是利用已知像素值对未知像素值进行估计的过程, 常用于将低分辨率(low-resolution, 简称 LR)图像插值得到对应的高分辨率(high-resolution, 简称 HR)图像. 图像插值的应用十分广泛, 包括数字图像的大尺寸打印、标清电视信号向高清电视信号的转换等. 传统的图像插值方法假设图像具有连续性, 并基于核函数的思想来取得较为平滑的插值效果, 如最近邻插值, 双线性插值以及双三次插值<sup>[1]</sup>等. 由于采用空间不变的核函数, 传统方法通常会在图像边缘产生锯齿状、模糊和振铃等瑕疵现象. 同时, 人类视觉系统对图像边缘特征较为敏感, 因此使得传统方法的视觉瑕疵更为严重. 降低和消除插值图像在边缘处的各种瑕疵现象并较好地保持图像边

\* 基金项目: 国家自然科学基金(61071082); 国家发改委高技术产业发展项目(发改办高技[2010]3044号); 北京市自然科学基金(4102025)

收稿时间: 2010-11-29; 定稿时间: 2011-04-28

缘特征,对图像插值十分重要。

针对传统插值方法的问题,一些空间自适应的插值算法被相继提出来。这些算法根据图像局部特征对插值系数进行自适应调整,以更好地匹配图像边缘结构。根据获取边缘特征信息的方式,可以将这些算法分为显式和隐式两类方法。显式方法的基本思想是,将图像的边缘特征显式地表达出来,引导插值过程沿着边缘方向取得较好的效果。例如,通过边缘提取算子提取图像边缘位置,并据此对插值系数进行调整<sup>[2,3]</sup>;提取图像的等照度线(isophote),并沿等照度线方向对插值过程进行引导<sup>[4,5]</sup>;根据图像梯度的方向和强度,对插值图像在边缘方向的连续性和跨边缘方向的尖锐特征进行增强和保持<sup>[6-8]</sup>等。在显式方法中,显式表达的边缘信息对最终图像插值效果具有十分重要的影响。但由于低分辨率图像在采集过程中常常受到噪声、模糊等多种降质效应的干扰,因此仅利用低分辨率图像对高分辨率图像边缘特征信息的检测和提取是一项较为困难的工作。

隐式方法则可以较好地解决上述显式方法的问题,其基本思想是,通过对局部图像邻域内统计量进行估计,从而根据隐式包含有边缘特征信息的统计量对插值过程进行自适应调整。文献[9]根据图像局部区域的像素强度均值和方差的统计量对两组正交方向滤波的结果进行加权融合,通过权重使插值沿着图像边缘方向保持平滑。文献[10]将图像建模为马尔可夫随机场,通过在局部窗口内对像素强度变化统计量的估计来计算中心插值点落在不同离散边缘方向上的可能性权重,通过最小化由权重定义的能量函数,使得图像沿边缘方向上保持平滑,跨边缘方向上保持尖锐。Li 等人<sup>[11]</sup>最早提出利用隐式包含了边缘信息的协方差统计量来调整自回归模型的插值系数,局部窗口中心插值点处的高分辨率协方差统计量由窗口内低分辨率采样点进行估计。该方法改善了传统插值方法中边缘部分的模糊效应,尤其对图像中较长边缘特征插值视觉效果最好。随后,Zhang 等人<sup>[12]</sup>进一步将自然图像建模为分段自回归模型,通过假设局部窗口内具有一致的自回归模型参数对窗口内所有待估计高分辨率像素点引入更多的空间相关关系约束,对 Li 等人的算法<sup>[11]</sup>进行了改进,使得算法对不同尺度大小的边缘和纹理特征均具有良好的适应性。在上述算法中,局部窗口采用了规则矩形形状并假设在窗口内图像区域具有一致的统计稳态性质。但是当图像边缘特征小于窗口尺度大小时,这一假设并不成立,因此对中心插值点的统计量估计和优化估计造成较大的系统误差。

针对上述问题,本文首先分析了自然图像中分段统计稳态区域形态的不规则性,继而提出一种基于概率描述的隐式分段自回归模型来刻画图像分段统计稳态区域形态的不规则性,并根据该模型提出一种基于加权最小二乘估计的图像插值算法。隐式分段自回归模型能够根据图像局部相似性特征对分段统计稳态区域形态进行较好的刻画,提高统计量估计的准确性,从而改善了现有算法中采用规则矩形窗口对模型参数的估计存在较大误差的问题。当图像边缘特征尺度小于局部窗口大小时,插值图像在边缘处仍能保持较好的边缘特征。实验结果表明,从主观视觉效果和客观质量评价上,本文算法都能取得较好的结果。

本文第 1 节对图像信号的自回归建模进行介绍,并根据对图像分段统计稳态区域不规则性的分析提出隐式分段自回归模型。第 2 节在隐式分段自回归模型的基础上提出一种基于加权最小二乘估计的图像插值算法,并给出算法实现细节。第 3 节通过实验将本文方法与其他 3 种现有插值方法进行比较,以进一步说明本文方法的有效性。最后对全文进行总结。

## 1 图像信号的建模

自然图像中,邻域像素点间往往存在着较大的相关性,对这种相关性的建模在图像去噪、编码及插值等图像处理领域中具有较为重要的意义。自回归模型是对上述相关性进行建模的较为通用的模型之一。本节首先对图像信号的自回归模型建模进行介绍。在进一步分析自然图像的分段统计稳态性的基础上,本文提出一种基于概率描述的隐式分段自回归模型来刻画图像信号中的分段统计稳态性质,从而实现了对图像信号较好的建模。

### 1.1 自回归模型

自回归模型是统计学和信号处理领域中的一种应用较为广泛的随机过程模型。它可以较好地对多种自然现象进行建模和预测分析。一维信号  $X_t$  的自回归模型可由公式(1)表示如下:

$$X_t = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1)$$

其中,  $N$  是自回归模型的阶,  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  是模型参数,  $\varepsilon_t$  是白噪声误差项.

对于二维图像信号  $X_{(i,j)}$  来说, 每个信号点周围存在一个二维空间邻域结构  $T$ , 自回归模型定义在该空间邻域结构  $T$  上, 如公式(2)所示:

$$X_{(i,j)} = \sum_{(m,n) \in T} \alpha_{(m,n)} X_{(i+m,j+n)} + \varepsilon_{(i,j)} \quad (2)$$

其中, 空间邻域结构  $T$  中的元素个数决定了自回归模型的阶.

## 1.2 分段统计稳态性

通过对自然图像统计分析发现, 尽管上述自回归模型的参数  $\alpha$  在整个图像空间的变化较大, 但在某些局部连通区域内, 该参数值保持不变或仅有微小改变. 这种区域被称为统计稳态区域, 通常存在于图像强度变化规律一致的区域, 例如平滑区域和沿边缘方向的区域等. 对整幅图像来说, 自回归模型参数具有分段统计稳态性质. 根据自回归模型, 图像插值的目标转变为对模型参数  $\alpha$  的估计. 基本方法是, 基于局部窗口内符合分段统计稳态性质的假设, 通过邻域像素采样对模型参数  $\alpha$  进行估计:

$$\bar{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \sum_{(i,j) \in W} \| X_{(i,j)} - \sum_{(m,n) \in T} \alpha_{(m,n)} X_{(i+m,j+n)} \|^2 \quad (3)$$

Li 等人<sup>[11]</sup>根据公式(3)独立地为每一个像素点估计其模型参数  $\alpha$ , 进而利用公式(2)进行像素点插值. Zhang 等人<sup>[12]</sup>则进一步地假设在局部窗口内每个像素点处估计得到的模型参数  $\alpha$  保持不变, 建立待估计像素点  $X_{(i,j)}$  和低分辨率像素点  $X_{(p,q)}$  之间的空间约束关系, 联合优化估计所有高分辨率像素点  $X_{(i,j)}$  的值:

$$\min_{\{X_{(i,j)}\}} \left\{ \sum_{(i,j) \in W} \| X_{(i,j)} - \sum_{(m,n) \in T} \alpha_{(m,n)} X_{(i+m,j+n)} \|^2 + \sum_{(p,q) \in W} \| X_{(p,q)} - \sum_{(m,n) \in T} \alpha_{(m,n)} X_{(p+m,q+n)} \|^2 \right\} \quad (4)$$

自然图像的分段统计稳态性质为图像信号的建模提供了一种较为有效的方式. 为了对图像信号进行自回归建模, 需要对各个统计稳态区域的形态进行较好的描述, 以用于对每个统计稳态区域内的模型参数  $\alpha$  进行较为准确和鲁棒的统计估计. 如图 1 所示, 为了估计  $y_c$  点局部邻域 ( $a_1$  区域) 内的自回归模型参数, 需要利用  $a_1$  区域内的像素值进行统计估计, 同时, 尽可能多地降低或排除不相似区域 (如  $a_2$  区域及  $a_3$  区域) 内部的像素值对  $y_c$  点处模型参数估计的影响. 采用显式的方法对统计稳态区域进行分割, 容易受到低分辨率图像中噪声、模糊等降质效应的影响; 同时, 分段统计稳态区域往往具有不规则的外在形状, 显式的形状描述会增加算法的设计和实现复杂度. 因此, 本文提出一种基于概率描述模型来隐式地刻画分段统计稳态区域的形态, 本文将将其称为隐式分段自回归模型.

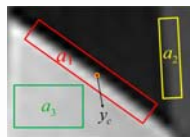


Fig.1 Piecewise statistical stationary property of natural images

图 1 自然图像的分段统计稳态性

为了刻画出局部图像的分段统计稳态区域, 需要设计一种较好的指标作为区域相似或相异的依据. 这种指标应该能够较好地反映出统计量的一致性 & 图像局部相似性. 考察两个像素点间的局部相似程度时, 通常可以从以下 3 个方面来进行度量:

- (1) 邻域结构相似性度量(neighborhood): 具有相似邻域结构的两个像素点间局部相似度较大.
- (2) 像素强度连续性度量(smoothness): 具有相同或相近强度的像素点间局部相似度较大.
- (3) 图像空间距离度量(distance): 两个像素点在图像空间中欧氏距离越近, 相似度越大.

本文提出的隐式分段自回归模型综合考虑了以上 3 个方面的度量要求, 以概率的形式表示像素点间的局

部相似性.局部相似性概率的总体度量指标  $p(x,y)$ 如公式(5)所示:

$$p(x,y) = p_n(x,y) \times p_s(x,y) \times p_d(x,y), p_n(x,y) = e^{-\|N_x - N_y\|_2^2 / \sigma_1}, p_s(x,y) = e^{-(I_x - I_y)^2 / \sigma_2}, p_d(x,y) = e^{-\|P_x - P_y\|_2^2 / \sigma_3} \quad (5)$$

其中,  $p_n(x,y)$ ,  $p_s(x,y)$ 和  $p_d(x,y)$ 分别对应邻域结构相似性度量、像素强度连续性度量和图像空间距离度量;  $N_x$ 和  $N_y$ 分别是由像素点  $x$ 和  $y$ 的邻域像素点的强度值构成的一维信号向量,分别用来表征像素点  $x$ 和  $y$ 的邻域结构.为了仅考虑各像素点邻域结构的相对强度对比关系,对上述形成的一维信号向量进行归一化,归一化后的信号向量为  $N^{norm} = N / (\max(N) + \tau)$ .  $\tau$ 是防止除零错误的正数,  $I_x$ 和  $I_y$ 分别表示像素点  $x$ 和  $y$ 的强度值,  $P_x$ 和  $P_y$ 分别表示像素点  $x$ 和  $y$ 的图像空间坐标.

通过建立各像素点间的相似度概率及分布,可以对该局部区域内的统计稳态区域形态进行隐式的描述.在相似度概率较高的图像区域内,图像的自回归模型参数  $\alpha$ 具有更好的一致性,因此,在该区域内进行统计量的估计将具有更高的精确性和鲁棒性.

## 2 本文算法

图像插值的一个基本目标是,自适应地选取合适的已知像素点信息,对未知像素点进行较好的预测.上述隐式分段自回归模型为这种自适应的预测提供了一种较好的依据.本节基于第 1.2 节提出的隐式分段自回归模型设计实现了一种改进的图像插值算法.该算法利用隐式分段自回归模型中像素点间的相似度概率作为模型参数相似程度的指示,进而将相似度概率作为对局部窗口内整体模型匹配误差的贡献权重,利用加权最小二乘法求得未知像素点的值,完成一个窗口的插值过程.下面将详细阐述本文提出的算法思想和实现细节.

令  $I_h$ 表示根据插值算法对低分辨率输入图像  $I_l$ 插值得到的高分辨率插值图像,不失一般性,假设低分辨率图像  $I_l$ 是由高分辨率图像  $I_h$ 在水平和垂直两个方向上根据因子为 2 的抽点下采样方式得到的.高分辨率图像  $I_h$ 的大小为  $2M \times 2N$ ,即  $I_h = I_{(i,j)} (i=1,2,\dots,2M, j=1,2,\dots,2N)$ ,  $I_l$ 可表示为  $I_l = I_{(2i-1,2j-1)} (i=1,2,\dots,M, j=1,2,\dots,N)$ .令  $x_i$ 表示低分辨率像素点,即  $x_i \in I_l$ ;令  $y_i$ 表示待插值高分辨率像素点,即  $y_i \in I_h$ .高、低分辨率像素点之间的关系如图 2(a)所示(黑色实心圆代表低分辨率像素点  $I_{(2i-1,2j-1)}$ ,灰色圆代表第 1 遍插值过程产生的像素点  $I_{(2i,2j)}$ ,空心圆代表第 2 遍插值过程产生的像素点  $I_{(2i,2j-1)}$ 和  $I_{(2i-1,2j)}$ ).

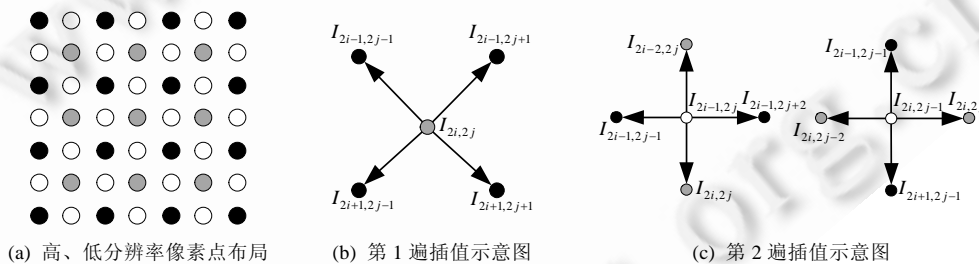


Fig.2 Low-Resolution image generation and two-pass interpolation layout

图 2 低分辨率图像生成及两步插值法示意图

根据上述假设和表示法,图像插值过程可表述为根据  $I_l$ 中的  $x_i$ 像素值对  $y_i$ 像素值进行插值预测,从而得到图像  $I_h$ . $y_i$ 像素点可分为两类:一类为下标均为偶数的未知像素点  $I_{(2i,2j)}$ ,如图 2 中灰色圆点所示;另一类为下标和为奇数的未知像素点  $I_{(2i,2j-1)}$ 及  $I_{(2i-1,2j)}$ ,如图 2 中空圆点所示.与文献[11]相似,本文采用两遍插值法来分别估计得到上述两类未知像素点的值.第 1 遍插值利用低分辨率像素点  $I_{(2i-1,2j-1)}$ 来插值得到  $I_{(2i,2j)}$ ;第 2 遍利用  $I_{(2i-1,2j-1)}$ 和  $I_{(2i,2j)}$ 来插值得到  $I_{(2i-1,2j)}$ 和  $I_{(2i,2j-1)}$ .从图 2(b)和图 2(c)可以看出,两遍的插值过程基本相同,不同之处仅在于有  $45^\circ$ 的旋转以及像素点间距离尺度有  $\sqrt{2}$  倍的放缩.下文中将以第 1 遍插值过程为例,对本文提出的插值算法进行详细阐述.

首先,对每一个高分辨率像素点  $I_{(2i,2j)}$ ,以其为中心选定一个固定大小的局部窗口,对其邻域图像区域内的统计量进行估计.为了便于表达,根据与中心待插值像素点的相对位置,将局部窗口内的低分辨率像素点  $x_i =$

$I_{(2i-1,2j-1)}$ 及高分辨率像素点  $y_i=I_{(2i,2j)}$ 进行编号.图3给出一个  $11 \times 11$  局部窗口内各像素点的编号规则,窗口中心像素点为  $I_{(2i,2j)}$ , $x_1$  对应  $I_{(2i-1,2j-1)}$ , $y_2$  对应  $I_{(2i-2,2j)}$ .

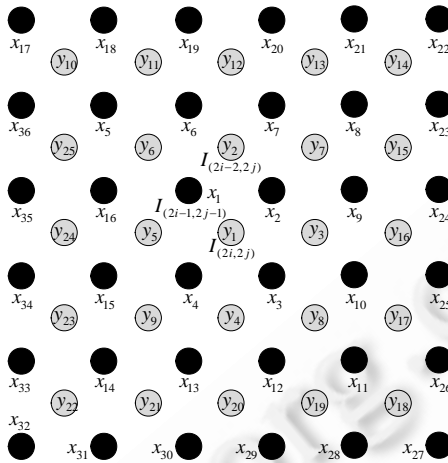


Fig.3 Configuration of pixel numbers in local window  
图3 局部窗口内像素点编号配置

2.1 高、低分辨率像素间的相似度概率模型

对每一个局部窗口,插值目标是要估计出中心插值点  $y_1$  的最优像素值.根据第 1.2 节的隐式分段自回归模型,需要计算得到中心插值点  $y_1$  与局部窗口内所有的高、低分辨率像素点之间的相似度概率,分别用公式(6)和公式(7)表示:

$$p_i^H = p^H(1, i) = p^H(i, 1), i = 1, 2, \dots, M \tag{6}$$

$$p_j^L = p^L(1, j) = p^L(j, 1), j = 1, 2, \dots, N \tag{7}$$

其中,  $M$  表示窗口内高分辨率像素点的个数,  $N$  表示窗口内低分辨率像素点的个数.如图 4 所示,  $p^H$  和  $p^L$  分别用来表示窗口中心插值点  $y_1$  与高、低分辨率像素点间的相似度概率.根据公式(5),计算两个像素点间的相似度概率与自身像素值及其邻域像素点的值有关.对于高分辨率像素点间的相似度概率  $p^H$  的计算,其自身像素值可通过对角邻居像素点的平均值近似;对于中心像素点  $y_1$  和低分辨率像素点间的相似度概率  $p^L$  的计算,低分辨率像素点  $x_k$  的邻居像素点均为未知像素点(如图 4 中的灰色圆点所示),可将其邻域范围扩大,选取尺度放大 1 倍后的低分辨率对角邻居像素点来构成其邻域结构表征向量  $N$ .

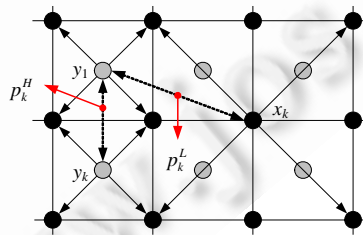


Fig.4 Similarity probabilities between high-resolution and low-resolution pixels  
图4 高、低分辨率像素间的相似度概率

2.2 加权最小二乘估计

本文使用自回归模型分别对图像信号在对角方向以及水平-垂直方向上的相关关系进行建模.在下文中,令

$\otimes$ 表示对角方向上的回归关系,令 $\oplus$ 表示水平-垂直方向上的回归关系, $t \in \{1,2,3,4\}$ 表示自回归模型中的第  $t$  个邻居.如图 5 中所示, $x_{i \otimes t}$  和  $y_{i \otimes t}$  分别表示像素  $x_i$  和  $y_i$  在对角方向上的第  $t$  个邻居, $x_{i \oplus t}$  和  $y_{i \oplus t}$  分别表示像素  $x_i$  和  $y_i$  在水平-垂直方向上的第  $t$  个邻居.引入两组参数来表征两组方向上的自回归模型参数,分别是  $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 和  $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ . $a_t$  表示对角方向上的系数, $b_t$  表示水平-垂直方向上的系数.

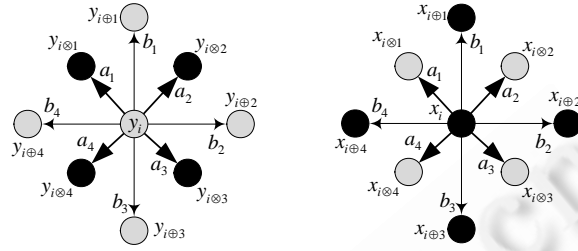


Fig.5 Notation for autoregressive model in diagonal and horizontal-vertical directions

图 5 对角方向和水平-垂直方向上的自回归模型符号表示

根据第 1.1 节的自回归模型以及局部窗口内的像素点编号,对角方向上的自回归模型表示为

$$x_i = \sum_{t=1}^4 a_t x_{i \otimes t} + \sigma_i^{\otimes}, y_i = \sum_{t=1}^4 a_t y_{i \otimes t} + \gamma_i^{\otimes} \quad (8)$$

其中,  $\sigma_i^{\otimes}$  和  $\gamma_i^{\otimes}$  分别是低分辨率像素点和高分辨率像素点的对角方向模型匹配误差.同理,水平-垂直方向上的自回归模型可以表示为

$$x_i = \sum_{t=1}^4 b_t x_{i \oplus t} + \sigma_i^{\oplus}, y_i = \sum_{t=1}^4 b_t y_{i \oplus t} + \gamma_i^{\oplus} \quad (9)$$

其中,  $\sigma_i^{\oplus}$  和  $\gamma_i^{\oplus}$  分别是低分辨率像素点和高分辨率像素点的水平-垂直方向上的模型匹配误差.

根据隐式分段自回归模型,在给定模型参数  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的前提下,局部窗口  $W$  内各像素点的匹配误差应根据相应的相似度概率进行加权调制,通过最小化窗口内所有像素点匹配误差能量来得到高分辨率像素点  $y_i$  在模型参数  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  匹配下的最优值.上述过程等价于公式(10)所表示的加权最小二乘估计问题,各权重为对应像素点的相似度概率:

$$\min_{\{y_i\}} \left\{ \sum_{i \in W} \left[ p_i^H \left( y_i - \sum_{t=1}^4 a_t y_{i \otimes t} \right) \right]^2 + \sum_{i \in W} \left[ p_i^L \left( x_i - \sum_{t=1}^4 a_t x_{i \otimes t} \right) \right]^2 \right\} \quad (10)$$

并且满足约束条件(11):

$$\sum_{i \in W} \left[ p_i^L \left( x_i - \sum_{t=1}^4 b_t x_{i \oplus t} \right) \right]^2 \approx \sum_{i \in W} \left[ p_i^H \left( y_i - \sum_{t=1}^4 b_t y_{i \oplus t} \right) \right]^2 \quad (11)$$

通过引入拉格朗日乘子  $\lambda$ ,上述带约束的优化问题可以转换为

$$\min_{\{y_i\}} F(\lambda) = \min_{\{y_i\}} \left\{ \sum_{i \in W} \left[ p_i^H \left( y_i - \sum_{t=1}^4 a_t y_{i \otimes t} \right) \right]^2 + \sum_{i \in W} \left[ p_i^L \left( x_i - \sum_{t=1}^4 a_t x_{i \otimes t} \right) \right]^2 + \lambda \sum_{i \in W} \left[ p_i^H \left( y_i - \sum_{t=1}^4 b_t y_{i \oplus t} \right) \right]^2 \right\} \quad (12)$$

$\lambda$  可通过迭代的方式进行计算:当约束条件(11)的左式小于右式时,增大  $\lambda$  的值;反之,则减小  $\lambda$  的值.根据实验统计, $\lambda$  的值介于 0.1~0.9 之间;对于大多数的自然图像,可直接取  $\lambda=0.5$  来代替迭代计算.

通过最小化目标函数  $F(\lambda)$ ,可以得到一组局部窗口内的高分辨率像素点的估计值.从公式(12)可以看出,各像素点匹配误差项前的相似度概率指示了对应像素点的估计值的可信度,相似度概率越大,表明估计值越接近最优值;概率越小,则表明估计值偏离其最优值的可能性越大,结果越不可信.本文算法仅输出局部窗口的中心插值点  $y_i$ ,其相似度概率为 1,表明其估计值最为可信.考虑到进一步降低算法时间复杂度,一种折中方案是同时输出窗口内相似度概率高于预定阈值的像素点的估计值作为其最终像素值.最后,通过将局部窗口在图像空间



内进行水平和垂直方向上的滑动,完成整幅图像的插值过程.

### 2.3 模型参数估计

公式(12)中的模型参数  $a$  和  $b$  可通过在局部窗口  $W$  内的低分辨率像素点的值进行估计.参数  $b$  的值可以通过下述加权最小二乘估计问题进行求解得到,即

$$\hat{b} = \arg \min_{\{b_i\}} \sum_{i \in W} \left[ p_i^L \left( x_i - \sum_{t=1}^4 b_t x_{i \otimes t} \right) \right]^2 \quad (13)$$

如图 6(a)所示,在水平-垂直方向上,低分辨率像素点间的自回归关系与待插值的高分辨率像素点间的自回归关系处于相同尺度空间,因此采用公式(13)对参数  $b$  的估计较为可靠.

参数  $a$  可由公式(14)采用类似的思路求解得到其最优值:

$$\hat{a} = \arg \min_{\{a_i\}} \sum_{i \in W} \left[ p_i^L \left( x_i - \sum_{t=1}^4 a_t x_{i \otimes t}^L \right) \right]^2 \quad (14)$$

在估计参数  $a$  时,  $x_i$  在对角方向上的高分辨率邻居像素点的值未知,因此假设高、低分辨率像素间具有几何对偶性,即  $x_i$  与其对角邻居像素点  $x_{i \otimes t}$  的关系与  $x_i$  同  $x_{i \otimes t}^L$  的关系一致,如图 6(b)所示,其中,  $x_{i \otimes t}^L$  ( $t=1,2,3,4$ ) 表示在低分辨率尺度上  $x_i$  在对角方向上的邻居像素点.通过以上的假设,可以将公式(14)的优化估计问题用公式(15)来代替计算,最终得到参数  $a$  的最佳估计值.

$$\hat{a} = \arg \min_{\{a_i\}} \sum_{i \in W} \left[ p_i^L \left( x_i - \sum_{t=1}^4 a_t x_{i \otimes t}^L \right) \right]^2 \quad (15)$$

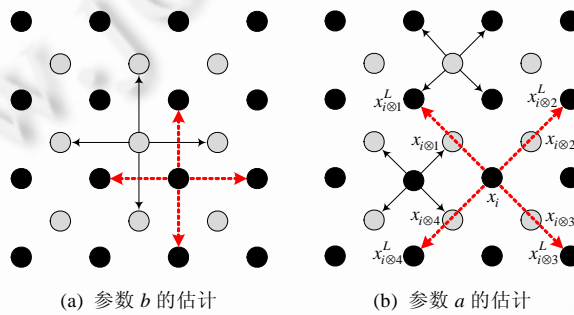


Fig.6 Geometric duality between high-resolution and low-resolution pixels  
图 6 高、低分辨率像素点间的几何对偶性

### 2.4 算法实现

一般来说,不同自然图像中统计稳态区域的尺度大小具有明显的差异,因此算法中局部窗口大小的选择应根据自然图像的特征进行自适应调整.由于采用了隐式分段自回归模型,因此本文算法中的局部窗口允许选取较大的尺寸,其中,结构差异较大的像素点可以通过较低的概率进行排除或降低其影响,保证统计量估计的准确性和鲁棒性.具体而言,本文算法选取的局部窗口大小如图 3 所示.其中,包含有 36 个已知的低分辨率像素点(黑色实心点)以及 25 个高分辨率待插值像素点(灰色圆点).为了便于表达,将局部窗口内的高、低分辨率像素点按照其编号整理成一维列向量的形式,分别是  $\mathbf{y}=[y_1, y_2, \dots, y_{25}]^T$  以及  $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_{36}]^T$ .

根据第 2.3 节的表述,模型参数  $\mathbf{a}=[a_1, a_2, a_3, a_4]^T$  和  $\mathbf{b}=[b_1, b_2, b_3, b_4]^T$  的最优估计问题可以表示为公式(16)的加权最小二乘估计问题:

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a}} \| \mathbf{W}_l (\mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{x}) \|_2^2, \quad \hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\mathbf{b}} \| \mathbf{W}_l (\mathbf{B}\mathbf{b} - \mathbf{x}) \|_2^2 \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{W}_l$  是由低分辨率像素点  $x_i$  的相似度概率构成的对角矩阵,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  是大小为  $36 \times 4$  的矩阵.矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $k$  行由  $x_k$  的对角方向的低分辨率邻居像素点  $x_{k \otimes t}^L$  构成,矩阵  $\mathbf{B}$  的第  $k$  行由  $x_k$  的水平-垂直方向的邻居像素点  $x_{k \otimes t}$  构

成.矩阵  $\mathbf{W}_l, \mathbf{A}, \mathbf{B}$  的具体形式为

$$\mathbf{W}_l = \begin{bmatrix} p_1^L & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2^L & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{36}^L \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{1\otimes 1}^L & x_{1\otimes 2}^L & x_{1\otimes 3}^L & x_{1\otimes 4}^L \\ x_{2\otimes 1}^L & x_{2\otimes 2}^L & x_{2\otimes 3}^L & x_{2\otimes 4}^L \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{36\otimes 1}^L & x_{36\otimes 2}^L & x_{36\otimes 3}^L & x_{36\otimes 4}^L \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_{1\otimes 1} & x_{1\otimes 2} & x_{1\otimes 3} & x_{1\otimes 4} \\ x_{2\otimes 1} & x_{2\otimes 2} & x_{2\otimes 3} & x_{2\otimes 4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{36\otimes 1} & x_{36\otimes 2} & x_{36\otimes 3} & x_{36\otimes 4} \end{bmatrix}.$$

公式(16)所表述的加权最小二乘估计问题的解析解可以表示为公式(17)的形式:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_l^2 \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_l^2 \mathbf{x}, \hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{W}_l^2 \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{W}_l^2 \mathbf{x} \quad (17)$$

用矩阵-向量的形式重写公式(12),可得到如公式(18)所示的加权最小二乘估计:

$$\hat{\mathbf{y}} = \arg \min_y \|\mathbf{W}(\mathbf{C}\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{x})\|_2^2 \quad (18)$$

$\mathbf{W}$  是由高、低分辨率像素点  $x_i$  和  $y_j$  的相似度概率构成的对角矩阵,矩阵  $\mathbf{W}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  的具体形式为

$$\mathbf{W} = \text{diag} [p_1^H, \dots, p_{25}^H, p_1^L, \dots, p_{16}^L, p_1^H, \dots, p_9^H], \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{25 \times 25} \\ \mathbf{C}_{16 \times 25}^1 \\ \lambda \mathbf{C}_{9 \times 25}^2 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{25 \times 36}^1 \\ \mathbf{D}_{16 \times 36}^2 \\ \mathbf{0}_{9 \times 36} \end{bmatrix}.$$

其中,  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵,  $\mathbf{0}$  表示零矩阵,下标指示了矩阵维度,  $\lambda$  为公式(12)中引入的拉格朗日乘子,矩阵  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  中的各个子矩阵的定义如下:

$$\mathbf{C}^1 = \{c_1(i, j)\} (i = 1, 2, \dots, 16, j = 1, 2, \dots, 25), c_1(i, j) = \begin{cases} \hat{a}_t, y_j \in \{x_{i\otimes t} | t = 1, 2, 3, 4\} \\ 0, \text{ other} \end{cases},$$

$$\mathbf{C}^2 = \{c_2(i, j)\} (i = 1, 2, \dots, 9, j = 1, 2, \dots, 25), c_2(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\hat{b}_t, & y_j \in \{y_{i\otimes t} | t = 1, 2, 3, 4\} \\ 0, & \text{ other} \end{cases},$$

$$\mathbf{D}^1 = \{d_1(i, j)\} (i = 1, 2, \dots, 25, j = 1, 2, \dots, 36), d_1(i, j) = \begin{cases} \hat{a}_t, x_j \in \{y_{i\otimes t} | t = 1, 2, 3, 4\} \\ 0, \text{ other} \end{cases},$$

$$\mathbf{D}^2 = [\mathbf{I}_{16 \times 16} \quad \mathbf{0}_{16 \times 20}].$$

公式(18)的解析解可以表示成公式(19)的形式,即

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{D}\mathbf{x} \quad (19)$$

最终,算法得到一组局部窗口内待估计高分辨率像素点  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{25}]^T$  的最优估计值.为了方便说明,本文仅输出窗口中心点  $\hat{y}_1$  的值.从公式(19)可以看出,窗口内每个待估计的高分辨率像素值是局部窗口内所有低分辨率像素点  $x_i$  像素值的线性组合,并且包含了像素点间的局部相似度信息,整个形式可看作是一个不可分离的自适应二维插值滤波器.

### 3 实验结果

本节将本文方法与现有插值方法进行实验对比来说明本文提出算法的有效性.进行比较的插值算法包括双三次插值(Bicubic)<sup>[11]</sup>、Li 等人的算法(NEDI)<sup>[11]</sup>以及 Zhang 等人的算法(SAI)<sup>[12]</sup>.双三次插值算法的实现来自于 MATLAB 7.6, Li 等人的 NEDI 算法实现来自其网站(<http://www.csee.wvu.edu/~xinli/>)提供的 MATLAB 代码, Zhang 等人的 SAI 算法实现来自其网站(<http://www.ece.mcmaster.ca/~xwu/>)提供的可执行文件.在本文算法的具体实现中,实验结果表明,当相似度概率计算公式(5)中的参数分别取  $\sigma_1=17, \sigma_2=50000, \sigma_3=33$  时,平均 PSNR(peak signal to noise ratio)结果较好.因此,下述实验中的主观视觉效果和客观评价结果(PSNR)均为在上述给定参数下的实验结果.

本文选取一组具有不同分辨率大小的图像(见表 1)作为实验测试图像集.为了比较不同插值算法插值图像的峰值信噪比(PSNR),首先对原始测试图像进行以 2 为因子的抽点下采样得到对应的低分辨率输入图像,应用不同的插值算法对低分辨率图像进行插值,得到与原始测试图像同等分辨率大小的插值图像,最终完成 PSNR



的计算.下采样过程如图 2(a)所示.

### 3.1 PSNR性能比较

表 1 给出了 4 种插值算法在不同图像上的 PSNR 比较.值得说明的是,不同算法由于局部窗口的大小选择不同,为了公平比较各个算法的插值性能,在计算 PSNR 时去掉了图像 10 个像素宽度的边界部分,仅保留图像的内部区域.从表 1 可以看出,本文方法在不同图像上的 PSNR 性能均优于其他算法,这与下文主观视觉效果的对比如果相一致.

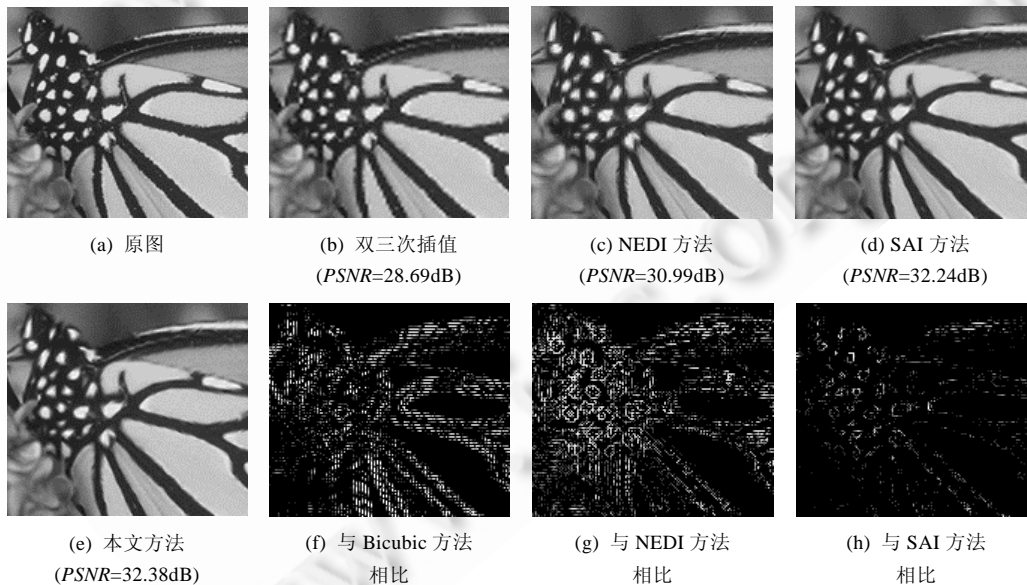
**Table 1** Comparison of PSNR of different interpolation methods (dB)

**表 1** 不同插值方法的 PSNR 比较 (dB)

images	Resolution	Bicubic	NEDI	SAI	Proposed method
Cameraman	256×256	25.18	25.34	25.70	<b>25.78</b>
Peppers	512×512	32.77	33.30	33.51	<b>33.56</b>
Lena	512×512	33.86	33.80	34.63	<b>34.67</b>
Monarch	768×512	31.72	31.68	32.90	<b>33.16</b>
Tulips	768×512	33.69	34.16	35.66	<b>35.82</b>
Caps	768×512	33.67	34.05	34.48	<b>34.48</b>
Airplane	768×512	30.73	31.21	31.65	<b>31.72</b>
Bike	768×512	25.93	25.97	26.97	<b>27.02</b>

### 3.2 主观视觉效果

图 7 和图 8 显示了不同插值算法在 Monarch 图像和 Airplane 图像的局部区域的插值效果对比.其中,各种算法在局部图像区域内的插值 PSNR 结果显示在括号中.从整体效果来看,由于原始图像在下采样的过程中丢失大部分像素信息,导致低分辨率输入图像的对比度有明显降低,因此各插值算法的结果与原始图像相比,在图像对比度上都有一定程度的降低.与其他算法相比,本文算法对于边缘处图像插值瑕疵的去除和边缘特征的保持效果更好.图 7(f)~图 7(h)和图 8(f)~图 8(h)分别显示了与 Bicubic、NEDI 和 SAI 算法相比,本文算法对原始图像保真度较高的像素点位置.



**Fig.7** Comparison of different interpolation methods on Monarch image

图 7 Monarch 图像上不同插值方法的比较

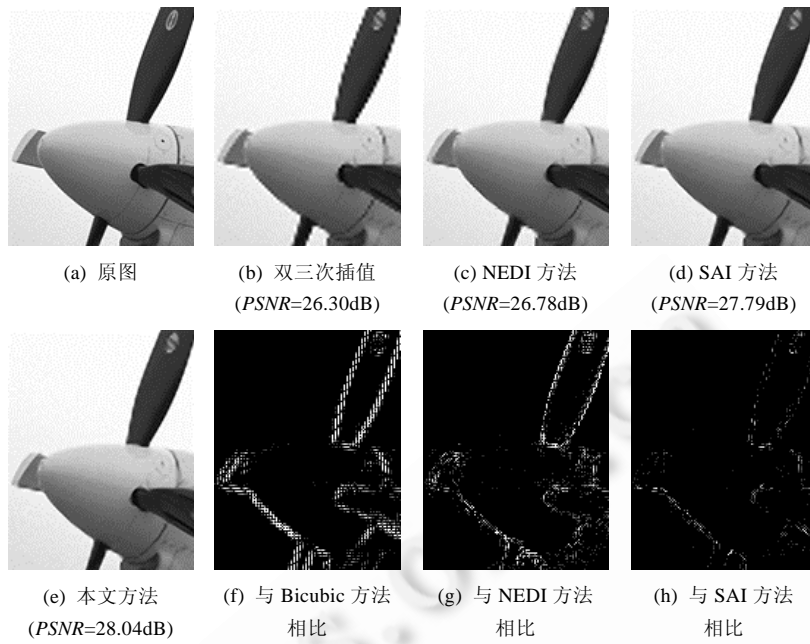


Fig.8 Comparison of different interpolation methods on Airplane image  
图 8 Airplane 图像上不同插值方法的比较

从这些位置图可以清晰地看出,本文算法较好地改善了双三次插值(Bicubic)在图像边缘部分的模糊和振铃效应;与 NEDI 和 SAI 算法相比,本文算法由于采用了隐式分段自回归模型来刻画分段统计稳态区域形态,对统计量的估计更加准确,因此减少了边缘处抖动和噪声等瑕疵,对图像的边缘特征保持得更好.图 9 展示了本文算法在彩色图像上的插值效果.在图像边缘和纹理区域,本文算法均取得了较好的主观视觉效果.

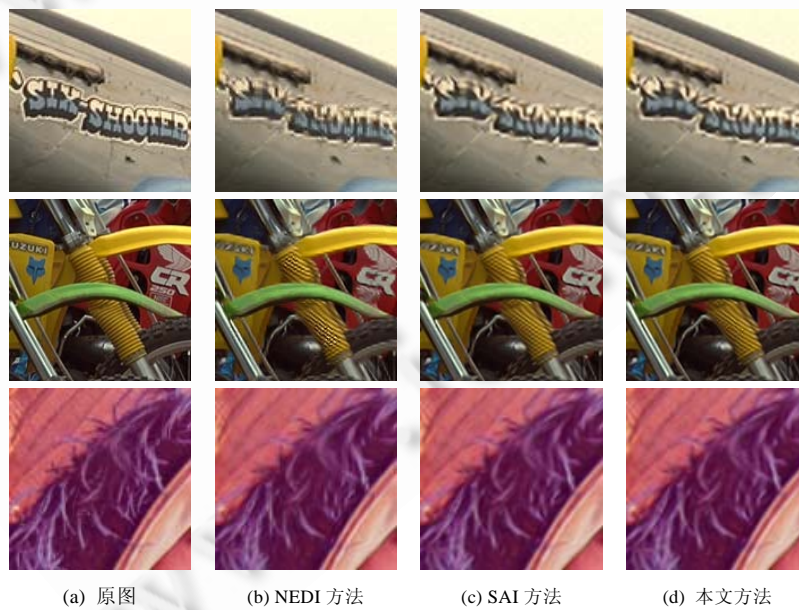


Fig.9 Comparison of different interpolation methods on color images  
图 9 彩色图像上不同插值方法的比较

## 4 结 论

本文首先对自然图像中的分段统计稳态性质进行了分析,提出了一种基于概率描述的隐式分段自回归模型,并基于该模型设计了一种改进的图像插值算法.在本文算法中,各个像素点对局部窗口内整体模型匹配误差的贡献用其相似度概率进行加权调整,最后利用加权最小二乘估计求得窗口内高分辨率像素值.本文算法在主观视觉效果和客观图像质量评价结果(PSNR)上均优于其他 3 种算法,对自然图像中的边缘特征保持得较好.本文算法的一个不足之处在于时间计算复杂度稍高,因此,今后的一个可扩展的工作是采用较为快速的迭代算法来求解矩阵逆运算,或对整幅图像采用并行计算加速插值过程.

**致谢** 感谢 West Virginia 大学的 Li Xin 教授和 McMaster 大学的 Wu Xiao-Lin 教授提供算法源码和可执行程序.

### References:

- [1] Keys RG. Cubic convolution interpolation for digital image processing. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1981,29(6):1153–1160. [doi: 10.1109/TASSP.1981.1163711]
- [2] Jensen K, Anastassiou D. Subpixel edge localization and the interpolation of still images. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1995, 4(3):285–295. [doi: 10.1109/83.366477]
- [3] Allebach J, Wong PW. Edge-Directed interpolation. In: *Proc. of the '96 Int'l Conf. on Image Processing (ICIP'96)*. Lausanne: IEEE Computer Society Press, 1996. 707–710. [doi: 10.1109/ICIP.1996.560768]
- [4] Morse BS, Schwartzwald D. Isophote-Based interpolation. In: *Proc. of the '98 Int'l Conf. on Image Processing (ICIP'98)*. Chicago: IEEE Computer Society Press, 1998. 227–231. [doi: 10.1109/ICIP.1998.999013]
- [5] Fu SJ, Ruan QQ, Mu CP, Wang WQ. Coupled bidirectional flow for adaptive image interpolation. *Journal on Communications*, 2007,28(2):29–32 (in Chinese with English abstract).
- [6] Chen BJ, Chen G, Wei P, Zhao XY. An improved adaptive interpolation algorithm based on edge for image zooming. *Journal of Software*, 2004,15:68–73 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/2004s108.htm>
- [7] Zhan Y, Wang MH, Wan Q, Li M. Modified algorithm with bidirectional diffusion for TV image interpolation. *Journal of Software*, 2009,20(6):1694–1702 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3532.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03532]
- [8] Mishiba K, Suzuki T, Ikehara M. Edge-Adaptive image interpolation using constrained least squares. In: *Proc. of the 2010 Int'l Conf. on Image Processing (ICIP 2010)*. Hong Kong: IEEE Computer Society Press, 2010. 2837–2840. [doi: 10.1109/ICIP.2010.5652113]
- [9] Zhang L, Wu XL. An edge-guided image interpolation algorithm via directional filtering and data fusion. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006,15(8):2226–2238. [doi: 10.1109/TIP.2006.877407]
- [10] Li M, Nguyen TQ. Markov random field model-based edge-directed image interpolation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2008, 17(7):1121–1128. [doi: 10.1109/TIP.2008.924289]
- [11] Li X, Orchard MT. New edge-directed interpolation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2001,10(10):1521–1527. [doi: 10.1109/83.951537]
- [12] Zhang XJ, Wu XL. Image interpolation by adaptive 2-D autoregressive modeling and soft-decision estimation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2008,17(6):887–896. [doi: 10.1109/TIP.2008.924279]

### 附中文参考文献:

- [5] 付树军,阮秋琦,穆成坡,王文洽.基于双向耦合扩散的自适应图像插值.通信学报,2007,28(2):29–32.
- [6] 陈北京,陈刚,魏平,赵晓宇.一种改进的基于边缘的自适应图像缩放插值算法.软件学报,2004,15:68–73. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/2004s108.htm>
- [7] 詹毅,王明辉,万群,李梦.TV 图像插值的双方向扩散改进算法.软件学报,2009,20(6):1694–1702. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3532.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03532]



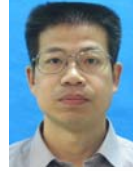
任杰(1984—),男,辽宁沈阳人,博士生,主要研究领域为图像视频处理,超分辨率重建.



白蔚(1990—),女,主要研究领域为图像视频处理.



刘家瑛(1983—),女,博士,讲师,CCF 会员,主要研究领域为数字视频处理与压缩.



郭宗明(1966—),男,博士,研究员,博士生导师,CCF 会员,主要研究领域为数字视频处理,图像处理.

www.jos.org.cn

www.jos.org.cn